

22. Radke M., Willsch H., Leythaeuser D., Teichmüller M. Aromatic components of coal: relation of distribution pattern to rank // *Geochim. et Cosmochim. Acta.* – 1982. – V. 46. – № 10. – P. 1831–1848.
23. Воробьева Н.С., Петров Ал.А. «Неразделяемая» смесь углеводородов нефти // *Нефтехимия.* – 2003. – Т. 43. – № 1. – С. 3–6.
24. Li M., Osadetz K.G., Yao H., Obermajer M., Fowler M.G., Snowdon L.R., Christensen R. Unusual crude oils in the Canadian Williston Basin, Southeastern Saskatchewan // *Org. Geochem.* – 1998. – V. 28. – № 7–8. – P. 477–488.
25. Ingram L.L., Ellis Y., Crisp P.T., Cook A.C. Comparative Study of oil shales and shale oils from the Mahogany Zone, Green River Formation (USA) and Kerosene Creek Seam, Rundle Formation (Australia) // *Chemical Geology.* – 1983. – V. 38. – № 3–4. – P. 185–212.
26. Вульфсон Н.С., Заикин В.Г., Микая А.И. Масс-спектрометрия органических соединений. – М.: Химия, 1986. – 312 с.

УДК 536.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОМЕРЗАНИЯ НАСЫЩЕННОГО ВЛАГОЙ ГРУНТА

Т.А. Нагорнова

Томский политехнический университет

E-mail: aleta@mail2000.ru

Решена задача о промерзании грунта с использованием математической модели, существенно отличающейся от классической постановки Стефана, без явного выделения границы фазового перехода. Задача решена методом конечных разностей с применением неявной итерационной разностной схемы. Установлено, что предложенный подход приводит к результатам, отличающимся не более чем на 4,4 % по температурам и по координате фронта промерзания при решении одномерной задачи.

Многие процессы теплообмена связаны с изменением агрегатного состояния материала. При этом теплофизические характеристики материала изменяются скачкообразно, и при фазовых переходах происходит выделение или поглощение теплоты [1]. Решение подобного рода задач имеет большое практическое значение в металлургии, строительной теплотехнике и в других прикладных дисциплинах.

В большинстве случаев решения задач о движении границы между жидкостью и твердым телом проводят по методу Стефана [2]. Следует отметить, что данный метод применим для одномерной постановки задачи, но значительно сложнее обстоит дело с двухмерной или с трехмерной задачей. Это является недостатком метода Стефана. В данной работе рассматривается другой подход к моделированию фазового перехода, отличный от классической задачи Стефана [2].

Рассмотрим этот подход на примере задачи о промерзании насыщенного влагой грунта. Анализ проводится на примере пластины бесконечной длины, толщиной L с некоторой начальной фиксированной температурой T_0 . В начальный момент времени на поверхности грунта устанавливается температура T_n , ниже температуры замерзания T_3 воды. В результате грунт начинает промерзать. Образуется промерзший слой переменной толщины ξ , зависящей от времени. Подвижная граница промерзания всегда имеет температуру кристаллизации. На этой границе происходит переход из одного агрегатного состояния в другое, при этом выделяется теплота Q .

Для описания процесса охлаждения грунта при промерзании используется модель [3], в которой явно не выделяется граница промерзания в граничных

условиях и область решения не разбивается на две подобласти, соответствующие разным агрегатным состояниям. Процесс тепловыделения при кристаллизации описывается источниковым членом в уравнении теплопроводности. Значение объемной скорости промерзания W рассчитывается по скорости продвижения изотермы $T=T_3$. Теплофизические свойства материала считаются постоянными. Задача рассматривается в неподвижной системе координат.

Математическая постановка задачи в рамках рассматриваемой модели имеет вид:

$$c(T) \cdot \rho(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_3 \cdot W}{L},$$

$$\tau > 0, 0 < x < L, \quad (1)$$

где c – теплоемкость; ρ – плотность; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; τ – время; x – координата; L – толщина слоя грунта; Q_3 – теплота кристаллизации; $W = \rho \cdot V$ – массовая скорость промерзания; V – линейная скорость кристаллизации.

Начальные условия:

$$\tau=0, T=T_0, 0 < x < L, \quad (2)$$

$$\tau=0, \xi=0. \quad (3)$$

T_0 – начальная температура.

Граничные условия:

$$x=0, T=T_n, \quad (4)$$

$$x=\xi, T=T_3=\text{const}, \quad (5)$$

$$x=L, \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности для слоя грунта с граничными

условиями первого рода на поверхности охлаждения решена методом конечных разностей [4]. Разностные аналоги исходных дифференциальных уравнений решены методом итераций с применением неявной четырехточечной разностной схемы. Область решения задачи массопереноса имела подвижную границу, поэтому вычисления проводились на нерегулярной сетке, учитывающей продвижение фронта промерзания вглубь грунта с переменной во времени скоростью. Особенность предложенного метода основывается на том, что скорость промерзания рассчитывается по температурам в узлах разностной сетки. С течением времени толщина промерзания увеличивается. Численное значение ξ рассчитывается по формуле:

$$\xi(\tau) = h \cdot i(\tau) + h \frac{T_{i-1}(\tau) - T_3}{T_{i-1}(\tau) - T_i(\tau)}, \quad (7)$$

здесь h – шаг разностной сетки по x ; i – номер узла сетки, в котором значение температуры достигло температуры замерзания воды; T_{i-1} , T_i – значение температуры в данный момент времени в $(i-1)$ и (i) узлах сетки.

Линейную скорость кристаллизации можно вычислить, используя следующее выражение:

$$V = \frac{\xi(\tau + \Delta\tau) - \xi(\tau)}{\Delta\tau} \cdot h, \quad (8)$$

где $\xi(\tau + \Delta\tau)$ и $\xi(\tau)$ – толщина промерзшего слоя в рассматриваемый и предыдущий моменты времени; $\Delta\tau$ – шаг разностной сетки по времени.

Поскольку поставленная задача решалась в одномерной постановке, то данный метод был протестирован по задаче Стефана о промерзании насыщенного влагой грунта. Решение стефановской задачи проводилось численно, по выше указанному алгоритму (1–8). Было выделено две подобласти решения. На каждом шаге по времени определялась толщина промерзания (граница раздела областей), а затем рассчитывалось температурное поле.

Температура замерзания различных грунтов зависит от влажности и консистенции, для водонасыщенных песчаных, текучих и текуче-пластичных глинистых грунтов данная температура близка к 273 К [5]. В этом случае задачу о промерзании грунта можно свести к задаче образования льда в воде [2]. Поэтому при проведении расчетов использовались значения: $L=0,03$ м; $T_0=247$ К; $\rho_s=920$ кг/м³; $\rho_e=1000$ кг/м³; $c_s=2100$ Дж/(кг·К); $c_e=4200$ Дж/(кг·К); $\lambda_s=2,7$ Вт/(м·К); $\lambda_e=0,68$ Вт/(м·К); $T_f=273$ К; $Q_f=334$ кДж/кг [6, 7].

На рис. 1 приведено типичное распределение температур по x при условии $T_n=272$ К.

На рис. 1 представлены зависимости температуры от координаты, полученные при решении задачи о промерзании грунта двумя различными подходами. Кривая 1 соответствует выше предложенной модели (1–8), а кривая 2 – модели Стефана. Как видно, температурные поля для разных решений незначительно отличаются друг от друга. На рис. 2 показано изменение величины промерзшего слоя от времени. При расчете толщины промерзшего слоя ξ на момент времени 200 с, были получены следующие результаты: 1,34 мм для решения первым способом, 1,28 – вторым, рис. 2. Анализ полученных результатов показывает, что относительная погрешность вычислений величины ξ составляет 4,4 %. Это позволяет сделать вывод о целесообразности использования модели (1–8) при решении задачи с учетом теплоты кристаллизации. Примером задач с фазовым переходом также являются такие процессы как конденсация и плавление. Следовательно, выше предложенная модель может быть применима и для их решения. Этот подход позволяет упростить процедуру расчета математического моделирования многомерной задачи с фазовым переходом. Следует отметить, что для проведенного исследования был использован относительно небольшой перепад температур.

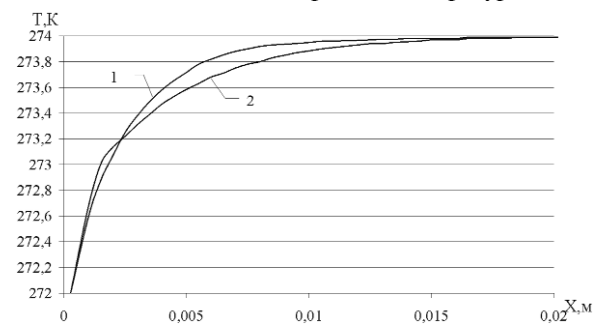


Рис. 1. Распределение температуры по координате x : 1) модель (1–8), 2) задача Стефана [2]

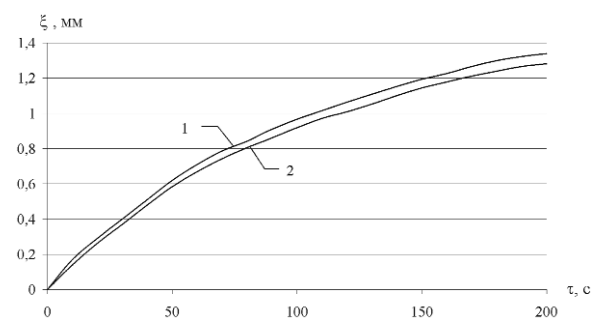


Рис. 2. Зависимость толщины промерзания от времени: 1) модель (1–8), 2) задача Стефана [2]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воздействие лазерного излучения на материалы / Р.В. Арутюнян, В.Ю. Баранов, А.А. Большой и др. — М.: Наука, 1989. — 367 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 599 с.
3. Кузнецов Г.В., Нестерова Е.С. Температурное поле частицы при осаждении из высокотемпературного газового потока на поверхность // Физика и химия обработки материалов. — 2000. — № 2. — С. 30–34.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.
5. Цитович Н.А. Механика мерзлых грунтов. — М.: Высшая школа, 1973. — 448 с.
6. Физические величины: Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.
7. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. — М.: Мир, 1982. — 520 с.

УДК 621.833.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТАКТА ПРИ ЛИНЕЙНОМ КАСАНИИ ВЗАИМООГИБАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.Б. Виноградов

Сибирский государственный университет путей сообщения. г. Новосибирск

E-mail: Vinogradov@mail.ru

Излагается дифференциальный метод определения скорости контакта по огибаемой и огибающей поверхности. Предложенным методом произведено исследование скорости перемещения контакта по поверхности зуба колеса в ортогональной глобоидной передаче с исходным цилиндрическим эвольвентным колесом.

Для оценки условий смазки и износа контактирующих поверхностей деталей машин наряду с характеристиками геометрии контакта (приведенная кривизна, длина контактной линии) важно иметь данные о скорости перемещения контакта по этим поверхностям. Теория гидродинамической смазки предписывает определять эту скорость в направлении, перпендикулярном касательной к контактной линии. При исследовании износостойкости скорость перемещения контакта по рабочей поверхности рассчитывают в направлении относительной скорости скольжения. В общем случае линейного касания взаимогогибаемых поверхностей расчет скорости контакта по огибаемой поверхности нетрудно произвести, если иметь уравнение контактных линий на этой поверхности. Однако если требуются данные о скорости контакта по огибающей поверхности, задача оказывается сложной из-за обычно громоздких уравнений этой поверхности.

В статье рассматривается дифференциальный метод, с одинаковой простотой пригодный для определения скорости контакта как по огибаемой, так и огибающей поверхности.

Существо метода заключается в том, что элемент перемещения контакта по огибающей или огибаемой поверхности рассчитывается в неподвижной системе координат.

Предположим, имеются две взаимогогибаемые поверхности Π_1 и Π_2 , контактирующие между собой по пространственной кривой М–М. Выберем три ортогональные системы координат:

- x_1, y_1, z_1 , жестко связанную с поверхностью Π_1 ;
- систему x_2, y_2, z_2 , жестко связанную с поверхностью Π_2 ;
- неподвижную систему x, y, z (рис. 1).

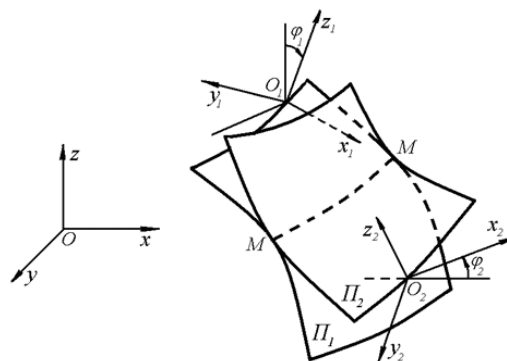


Рис. 1. Расчетная схема

Пусть движение поверхности Π_1 относительно неподвижной системы координат характеризуется уравнением

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_1(x, y, z, \varphi_1) \quad (1)$$

и уравнением обратного перехода

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_1, y_1, z_1, \varphi_1). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{S}_1 и \mathbf{S} — радиус-вектор точки соответственно в системе x_1, y_1, z_1 и системе x, y, z ; φ_1 — параметр, характеризующий относительное движение.

Движение поверхности Π_2 относительно неподвижной системы координат будем характеризовать уравнением

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2(x, y, z, \varphi_2) \quad (3)$$

и уравнением обратного перехода

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_2, y_2, z_2, \varphi_2). \quad (4)$$

Здесь \mathbf{S}_2 — радиус-вектор точки в системе x_2, y_2, z_2 ; φ_2 — параметр, характеризующий относительное движение.